

Control Digital PID y Dead Beat para la Posición Angular de Helicóptero de un Grado de Libertad

F. R. Jiménez López^a, I. A. Ruge Ruge^b, A. F. Jiménez López^c

^{a,b}Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Escuela de Ingeniería Electrónica – Grupo de Investigación I²E

Avenida Central del Norte # 39-115 - Edificio Central - Of. C233 – Tunja, Colombia

^cUniversidad de los Llanos

Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería – Grupo de Investigación MACRYPT

Km. 12 Vía Puerto López – Villavicencio, Colombia

fabian.jimenez02@uptc.edu.co, ilber.ruge@uptc.edu.co, ajimenez@unillanos.edu.co

Resumen

Este documento presenta el diseño, implementación y evaluación de dos estrategias de control digital PID y Dead Beat para estabilizar la posición angular de un helicóptero de un grado de libertad. El modelo dinámico no lineal del helicóptero se obtuvo utilizando ecuaciones de Newton – Euler, se linealizó y se representó como función de transferencia y en el espacio de estados. Se establecieron especificaciones y restricciones de operación del sistema y se formuló el procedimiento de diseño de los controladores a partir del modelo obtenido. Los resultados de la simulación de las estrategias de control se realizaron en Simulink® de MATLAB® y el sistema de adquisición y distribución de señales se implementó sobre la tarjeta digital Arduino™ Uno. La evaluación de los algoritmos de control en el sistema real se realizó comparando parámetros de desempeño dinámico y estático para lograr la estabilización de la inclinación (elevación) del balancín a los valores deseados. El controlador PID y de Muerte Súbita tuvieron un desempeño satisfactorio para garantizar la estabilización del helicóptero en los ángulos de operación establecidos, siendo funcionales para compensar la no linealidad e inestabilidad del prototipo.

Palabras clave: Modelado, Control Digital, Control PID, Control DeadBeat, Helicóptero 1-DOF, Matlab®, Arduino™.

I. Introducción

El helicóptero de un grado de libertad (1-DOF – One Degree of Freedom) es una plataforma experimental para el estudio del modelado y control automático en ingeniería. La implementación de este sistema es simple y permite la experimentación de métodos clásicos y modernos de diseño en ingeniería de control para ser evaluados y facilitar la comprensión de sus resultados.

Este prototipo posee características desafiantes y atractivas para su análisis académico como son su naturaleza no lineal y su inestabilidad mecánica a lazo abierto (Park & Lee, 1999; Xioxao & Xiucheng, 2005; Xincheng & Ying, 2007; Yao & Yisheng, 2009). En la actualidad este sistema ha atraído la atención de los investigadores de sistemas de control a nivel mundial para explorar diversas posibilidades de implementación de estrategias de control para mantener el equilibrio debido a sus características distintivas y maniobrabilidad para aplicaciones en los campos de la automatización, robótica, aeronáutica, aeroespacial, militar y civil entre otras (Ishukina, 2004; Shan & Liu, 2005; Lopez & Ortega, 2007; Oliveira & Cossi, 2009; Gao & Xu, 2012). El montaje del sistema helicóptero 1-DOF se muestra en la figura 1. Consiste de un sistema hélice-motor (propulsor) instalado al extremo de una barra o balancín que se apoya sobre un punto pivote o eje de giro móvil montado sobre una barra fija soportada por una base.

La hélice controla la elevación del helicóptero sobre el eje de elevación del balancín, es decir, la barra o balancín se inclina

con respecto al punto pivote de giro aplicando una señal de control que alimenta al motor para variar su velocidad. El movimiento de la hélice acoplada al motor provoca una fuerza de empuje que genera un chorro de aire dirigido.

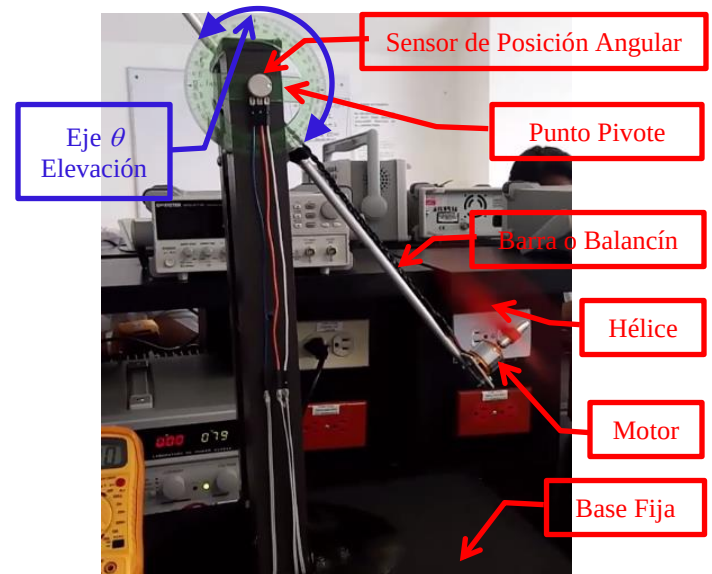


Figura 1. Sistema Helicóptero 1-DOF.

Mediante el principio de Bernoulli, el chorro de aire entregado por la hélice actúa como fuerza de propulsión que se manifiesta en la elevación del balancín del helicóptero

Al elevar o descender la barra, la posición angular del balancín del helicóptero presenta variaciones de la inclinación, la cual se mide por medio de un sensor resistivo lineal de excelente resolución que se acopla al punto pivote, para ser transferida, registrada y procesada por el sistema de control digital. El helicóptero 1-DOF es por lo tanto un sistema electromecánico cuya entrada de control es independiente de su grado de libertad.

El objetivo del control, es manipular la velocidad de giro del motor para regular la fuerza de empuje que actúa sobre el balancín del helicóptero y en consecuencia controlar el ángulo de inclinación a valores deseados.

Este es un problema de control complejo debido a la no linealidad del sistema y su naturaleza inestable a lazo abierto, ya que la salida del sistema (posición angular) puede incrementarse sin límite como respuesta a una entrada constante de gran magnitud. Para ello, en este trabajo se propuso diseñar e implementar un esquema de control retroalimentado para mantener la inclinación de la barra del helicóptero en una posición de giro deseado alrededor 0° en un rango entre $\pm 45^\circ$ grados geométricos de inclinación (Quanser, 2006; Zhu & Li, 2009; Zhang & Bi, 2010; Liu & Shi, 2010).

La descripción del prototipo experimental del helicóptero se presenta en la sección 2 del documento. En la sección 3, la dinámica y el desarrollo del modelo matemático para el control del ángulo de elevación del helicóptero 1-DOF son obtenidos analítica y experimentalmente. El diseño de las estrategias de control, incluyendo el control clásico PID (Proporcional, Integral y Diferencial) y el control por Muerte Súbita (Dead Beat) para estabilizar la plataforma, se discuten en la sección 4. Finalmente en la sección 5 se analizan los resultados obtenidos de la simulación de los algoritmos de control digital diseñados y se evalúa el desempeño sobre la planta del helicóptero real implementado.

II. Descripción del Prototipo Experimental

A. Descripción Mecánica del Prototipo

La plataforma mecánica del Helicóptero 1-DOF construida y mostrada en la figura 1, tuvo en cuenta cuatro componentes: la base, el soporte o barra fija, el balancín y sistema propulsor. La base de dimensiones $0.4 \times 0.4 \times 0.2$ [m³] en forma de caja fue construida en acrílico con una compuerta para albergar las tarjetas electrónicas de instrumentación y control, y la correspondiente bornera de conexión de señales y puertos.

La barra fija se construyó mediante dos estructuras paralelas en aluminio de 0.4 [m] de altura y de 0.037 [m] de ancho, debido a que este material es liviano y resistente. La parte inferior de las barras paralelas se sujetaron a una sub base metálica con tornillos se acoplo a la base. En el centro de la parte superior de las barras paralelas se acoplo el eje que sostiene el balancín en el punto pivote.

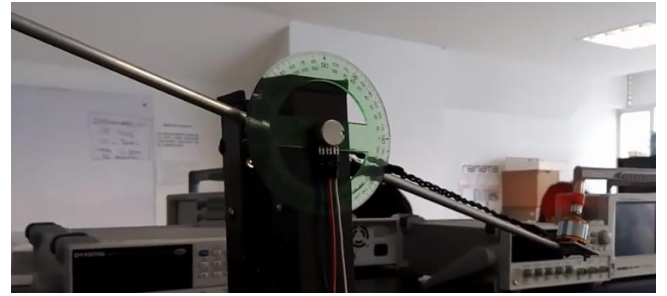


Figura 2. Montaje Mecánico Helicóptero 1-DOF.

En el acople de la barra vertical fija y el balancín se usaron dos rodamientos para reducir la fricción del eje de inclinación. El balancín se implementó mediante un tubo de aluminio de 0.01 [m] de diámetro, para que el motor eleve el menor peso posible.

En el extremo de mayor longitud del balancín (0.63 [m]) se realizó el acople mecánico del conjunto motor-hélice. Para el propulsor se seleccionó un conjunto motor-hélice-driver modelo D2826 de Turnigy® compuesto por un motor sin escobillas y controlado por PWM (Pulse Wide Modulation), cuyas características generales se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Características Propulsor D2826/13.

Parámetro	Unidades	Valores
Tamaño Motor	[mm]	$\phi 28 \times 26$
Tamaño Eje	[mm]	$\phi 3.175 \times 37$
Peso	[Kg]	0.05
KV	[rpm/V]	1000
Potencia Máxima	[W]	150
Corriente Máxima	[A]	8
Resistencia Interna	[MΩ]	0.127
Batería	[V]	24, Li-Po

En el punto pivote se instaló un graduador para visualizar las variaciones de posición angular en forma directa, como se aprecia en la figura 2.

B. Instrumentación Electrónica del Prototipo

Las figura 3 ilustra la arquitectura del sistema helicóptero 1-DOF instrumentado. El sensor utilizado para medir la inclinación del balancín fue un potenciómetro lineal de 10 [KΩ].

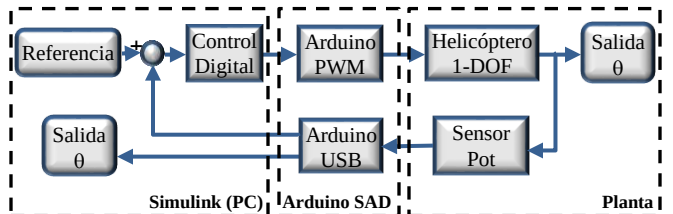


Figura 3. Diagrama de Bloques del Prototipo del Helicóptero.

El eje del sensor se acoplo mecánicamente dentro del rodamiento ubicado en el pivote del balancín. El potenciómetro se alimentó con un voltaje de 5 [V] y mediante

la configuración divisora de tensión acondicionada por un amplificador de instrumentación proporciona la señal de voltaje proporcional a la variación angular a una entrada análoga del módulo Arduino™ (Pallas, 2003) para su procesamiento.

El circuito de acondicionamiento del sensor entrega variaciones de voltaje entre 1.5[V] a 4.5[V] para variaciones proporcionales de posición angular del balancín entre -45° y $+45^\circ$, el cual fue validado y registrado experimentalmente usando la tarjeta Arduino™. La tarjeta Arduino™ Uno genera las señales PWM de control que ingresan al driver ESC (Electronic Speed Controller) de referencia *Plush 8A* para proporcionar al propulsor la potencia necesaria para la activación del motor (Basta, 2012; Lundstrom & Krus, 2010).

El algoritmo almacenado en la tarjeta Arduino™ recibe la señal de voltaje entregada por el potenciómetro a través de un pin de entrada análoga A0 del módulo CAD de 10 bits. Este valor digital se acondiciona a 8 bits para proporcionar valores digitales entre 0 y 255 correspondiente a variaciones angulares entre -45° y $+45^\circ$.

El dato leído durante cada periodo de muestreo (0.01[s]) se almacena en un registro que se transfiere como dato a través del puerto serial SPI del Arduino™ (comando *Serial.write()*) hacia el computador para ser leído desde el modelo de Simulink® (Bloque *Serial Receive*).

El Arduino™ también recibe el dato correspondiente a la señal de control proveniente de Simulink®, que establece el valor de energía necesaria para variar la velocidad del propulsor a los valores deseados. La señal de control se escala entre 0 y 255 para ser enviada como un solo byte en formato no signado (Bloque *Serial Send*).

La señal de control recibida por el Arduino™ ((comando *Serial.read()*)) desde el computador genera una señal PWM con ciclo de trabajo proporcional desde 0 hasta el 100 [%] para valores digitales desde 0 a 255. La señal PWM se genera a través del pin digital de salida 9 del Arduino™ y varía entre 0 y 5 [V] a una frecuencia aproximada de 500 [Hz].

La señal PWM ingresa al driver ESC que adecua los valores de tensión entre 0 y 24 [V] y de corriente de 2 [A], necesarios para impulsar el motor-hélice.

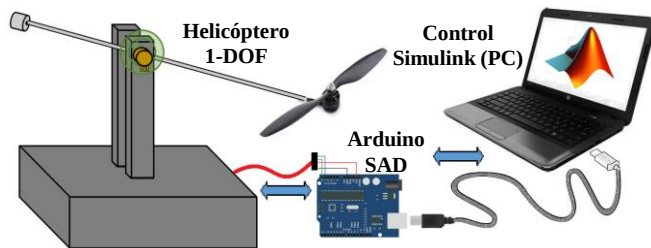


Figura 4. Disposición del Helicóptero 1-DOF instrumentado.

La comunicación serial asíncrona SPI para realizar transferencia de datos bidireccional entre el Arduino™ y la plataforma Simulink® de MATLAB® se configura a una tasa

de 9600 [baudios] a través del puerto USB (Universal Serial Bus).

El sistema de control se implementó sobre la herramienta de Simulink® (Kibbe, 2014) la cual ejecuta los modelos de los controladores discretos diseñados en tiempo real, utilizando bloques de comunicación serial que reciben la señal del sensor y entregan la señal de control, desde y hacia la Tarjeta Arduino™ respectivamente, en un formato digital no signado de 8 bits escalizado. Adicionalmente, es posible monitorear la posición angular de salida actual del sensor, la señal de error, la señal de control, y establecer el punto de operación de referencia para la posición angular deseada.

La tarjeta Arduino™ se alimenta a través del puerto USB del computador y las tarjetas electrónicas mediante una fuente de alimentación DC externa que proporciona 5[V] y 24[V] para el driver ESC del propulsor. Todos los circuitos de alimentación, control, acondicionamiento y bornes de conexión se ubicaron en el interior de la base fija de soporte.

III. Modelado e Identificación del Sistema

A. Dinámica del Helicóptero 1-DOF

La figura 5 ilustra el diagrama de cuerpo libre del helicóptero 1-DOF. La configuración del sistema corresponde a una plataforma de rotación de un sólido alrededor de su eje central de inercia.

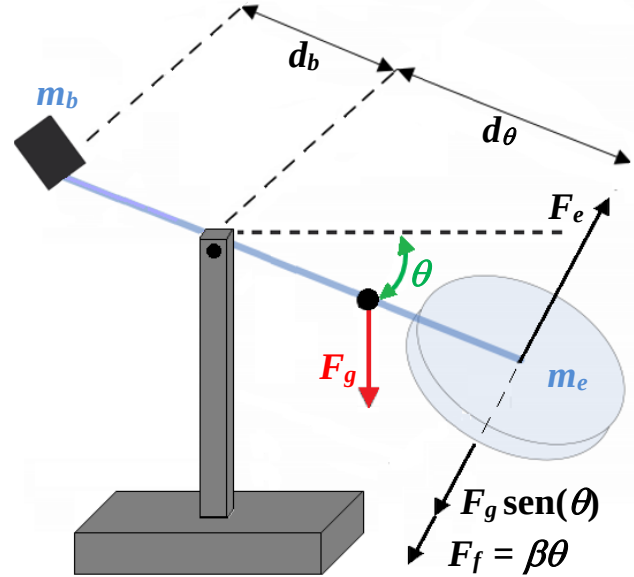


Figura 5. Diagrama de Cuerpo Libre Helicóptero 1-DOF.

Algunas convenciones de modelado en el helicóptero 1-DOF propuesto son:

1. El helicóptero está en posición horizontal cuando el ángulo de elevación es igual a $\theta = 0$.
2. El incremento positivo del ángulo de elevación, $\dot{\theta} > 0$, se presenta cuando el extremo del balancín donde está el propulsor (conjunto motor-hélice) se desplaza hacia arriba.

3. El incremento del ángulo de elevación, $\theta > 0$, implica que la fuerza de empuje en ese eje es positiva $F_e > 0$.

El modelo matemático para el diagrama de cuerpo libre del helicóptero 1-DOF mostrado en la figura 5 se describe mediante una ecuación diferencial no lineal de segundo orden que representa la dinámica del eje de elevación a partir del formalismo de Newton-Euler, que estudia el modelo según las ecuaciones de fuerza de Newton y las de rotaciones de Euler.

En este sentido, la variación de la velocidad de rotación del propulsor viene determinada por la variación de su posición angular por lo cual, se describe el movimiento de rotación mediante una ecuación que relacione la aceleración angular del mismo utilizando balance de torques.

De la figura 5 se define m_b como la masa del bloque de balance o contrapeso, m_e es la masa total del propulsor (motor-hélice), d_θ la distancia medida desde el punto pivote rotativo del balancín hasta el propulsor, d_b la distancia desde el punto pivote y el bloque de balance, y v_e el voltaje aplicado al propulsor para generar F_e .

La variación de la posición angular y elevación del balancín se produce cuando la fuerza de empuje F_e ejercida por el par motor-hélice con masa m_e es mayor que la fuerza de gravedad efectiva F_g debida al peso del helicóptero.

Por tanto, en el eje de elevación, hay dos fuerzas implicadas: la fuerza de gravedad F_g y la fuerza de empuje ejercida por el propulsor F_e sobre el eje vertical x . La fuerza de empuje provoca un torque alrededor del punto de rotación del balancín, el cual se describe por (Wolf, 2011):

$$M_{emp\theta} = d_\theta \cos(\theta) F_e^v \quad \text{Ec. 1}$$

La fuerza de empuje F_e generada por el giro de la hélice depende de parámetros como son la densidad del aire ρ en $[Kg/m^3]$, la velocidad de giro de la hélice V en $[m/s]$, el área superficial que forma la hélice al girar S_{hel} en $[m^2]$ y un coeficiente de elevación adimensional C_e de la siguiente forma:

$$F_e = \frac{1}{2} \rho V^2 S_{hel} C_e \quad \text{Ec. 2}$$

La fuerza gravitacional F_g provoca un torque gravitacional $M_{g\theta}$. Sin embargo, es más práctico y preciso obtener este momento estático mediante la medición del par en el propulsor con masa m_e (figura 5) para diferentes ángulos de elevación θ utilizando una escala ponderada. Con estas mediciones, el torque gravitacional con respecto a la articulación se puede obtener por:

$$M_{g\theta} = d_\theta \cos(\theta) F_{m,g}(\theta) \quad \text{Ec. 3}$$

Donde $F_{m,g}(\theta)$ se puede expresar como $F_g \cdot \sin(\theta)$, que para variaciones pequeñas de θ se puede aproximar $\theta \approx \sin(\theta)$. La fricción rotacional sobre el punto pivote del eje elevación puede ser considerada como:

$$M_{f\theta} = d_\theta \beta \dot{\theta} \quad \text{Ec. 4}$$

Donde β es el coeficiente de rozamiento. La rotación alrededor del recorrido del eje de elevación hace que esta rotación genere una fuerza centrífuga que impulsa el helicóptero hacia arriba. Como la fuerza centrífuga solo depende de la rotación alrededor del eje de elevación y un factor constante, es factible determinarla experimentalmente. Después de algún tiempo, el helicóptero se estabiliza en un determinado ángulo de elevación θ . Entonces, la componente de la fuerza centrífuga perpendicular al eje x es equivalente a la fuerza gravitacional para esta elevación (Brantner & Fuchs, 2012; Bharathi & Kumar, 2013). La fuerza centrífuga puede ser descrita por:

$$M_{cent} = k_{cent} \dot{\theta}^2 \quad \text{Ec. 5}$$

Donde k_{cent} es una constante escalar y $\dot{\theta}$ la velocidad de rotación alrededor del eje de elevación. Otro torque importante es causado por el rotor, debido a que la resistencia del aire puede originar un par de torsión alrededor de su eje de rotación. La resistencia del aire puede ser descrita por:

$$F_{ra} = \frac{1}{2} c_{ra} \rho A v^2 \quad \text{Ec. 6}$$

Donde c_{ra} es el coeficiente de resistencia aerodinámica, ρ la densidad del aire y A es el área superficial efectiva del rotor. El torque de la resistencia del aire depende cuadráticamente del empuje del motor por lo que el par efectivo sobre el eje de elevación es:

$$M_{ra}^e = \frac{1}{2} k_{mra} \sin(\theta) F_e^2 \quad \text{Ec. 7}$$

Donde k_{mra} es un factor constante a identificar. De esta forma, haciendo uso del principio de conservación del momento, teniendo en cuenta las consideraciones expuestas, se obtiene el modelo dinámico para el eje de elevación:

$$J_e \ddot{\theta} = M_{emp\theta}(F_e) + M_{g\theta}(\theta) + M_{f\theta}(\dot{\theta}) + M_{cent}(\dot{\theta}) + M_{ra}^e(F_e) \quad \text{Ec. 8}$$

Dónde J_e es el momento de inercia del sistema sobre el eje de elevación. Asumiendo que la componente de par debida a la fuerza centrífuga y considerando que el par de resistencia del aire son despreciables comparadas con el par de empuje, gravitacional y de fricción, la expresión de la Ec. 8, se puede simplificar de la siguiente forma:

$$J_e \ddot{\theta} = M_{emp\theta}(F_e) + M_{g\theta}(\theta) + M_{f\theta}(\dot{\theta}) \quad \text{Ec. 9}$$

Al reemplazar los componentes de la Ec. 9 se tiene que:

$$J_e \ddot{\theta} = d_\theta \cos(\theta) F_e - d_\theta \cos(\theta) F_{m,g} \theta - d_\theta \beta \dot{\theta} \quad \text{Ec. 10}$$

A partir del modelo no lineal de la Ec. 10 se puede obtener un modelo lineal aproximado donde las variaciones de la posición angular alrededor del punto de operación $\theta = 0$ son lo suficientemente pequeñas. De esta manera, el modelo de la ecuación diferencial lineal que describe la dinámica del movimiento de la posición angular con respecto al voltaje v_e aplicado al propulsor del helicóptero se simplifica de la siguiente manera:

$$J_e \ddot{\theta} = d_\theta F_e - d_\theta F_g \theta - d_\theta \beta \dot{\theta} \\ = K_e d_\theta v_e - F_g d_\theta \theta - \beta d_\theta \dot{\theta} \quad \text{Ec. 11}$$

Donde K_e es la constante de fuerza de elevación del propulsor.

B. Modelo en el Espacio de Estados

Aplicando la Transformada de Laplace a la Ec. 11 se obtiene la función de transferencia lineal alrededor del punto de operación para la dinámica de movimiento angular en el eje de elevación del helicóptero 1-DOF:

$$J_e s^2 \Theta(s) = K_e d_\theta V_e(s) - F_g d_\theta \Theta(s) - \beta d_\theta s \Theta(s)$$

$$\frac{\Theta(s)}{V_e(s)} = \frac{K_e d_\theta}{J_e s^2 + \beta d_\theta s + F_g d_\theta} \quad \text{Ec. 12}$$

De la ecuación lineal de movimiento del helicóptero 1-DOF se deriva el modelo en espacio de estados lineal (**A**, **B**, **C**, **D**) que describe la dinámica de la posición angular con respecto al voltaje aplicado al propulsor del helicóptero de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \quad \text{Ec. 13}$$

Donde el vector de estado del helicóptero está definido por la posición θ y velocidad $\dot{\theta} = \omega$ angulares en el eje de elevación (Santos & Choudhary, 2014; Corvalán & Negroni, 2012):

$$x^T = [\theta(t), \dot{\theta}(t)] \quad \text{Ec. 14}$$

Y como vector de salida la posición angular en el eje de elevación:

$$y = [\theta(t)] \quad \text{Ec. 15}$$

Las matrices que definen el espacio de estado del sistema linealizado son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{F_g d_\theta}{J_e} & -\frac{\beta d_\theta}{J_e} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_e d_\theta}{J_e} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 16} \\ C = [1 \quad 0] \quad D = [0]$$

Los valores de los parámetros físicos medidos del helicóptero 1-DOF real implementado se resumen en la Tabla 2:

Tabla 2. Valores de los parámetros físicos del sistema Helicóptero 1-DOF

Símbolo	Unidades	Valores
J_e	[Kg/m ²]	0.02856
d_θ	[m]	0.63
d_b	[m]	0.47
m_e	[Kg]	0.167
m_b	[Kg]	0.033
F_g	[Kg.m/s ²]	0.657

Remplazando con los valores obtenidos de la Tabla 1 en la función de transferencia de la Ec.12 y la representación en espacio de estados de la Ec. 16, desconociendo el valor del coeficiente de fricción β y la contante K_e que no pudieron ser inferidas se tiene el modelo lineal de segundo orden:

$$\frac{\Theta(s)}{V_e(s)} = \frac{22.0588 K_e}{s^2 + 22.0588 \beta s + 13.8971} \quad \text{Ec. 17}$$

Y:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -387.67 & -39.518\beta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 39.518 K_e \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 18} \\ C = [1 \quad 0] \quad D = [0]$$

C. Identificación del Modelo del Prototipo Instrumentado

Previo al diseño del control, se realizó la validación experimental del modelo con la arquitectura del prototipo instrumentado en la figura 4, mediante el método de curva de reacción a lazo abierto.

Para ello se realizó la respuesta al escalón con valores cercanos al punto de operación (posición horizontal del balancín en 0°). La obtención de la respuesta al escalón de la planta se realizó mediante la implementación de un código en la tarjeta de desarrollo Arduino™ para generar una variación instantánea de la señal PWM aplicada al propulsor. La respuesta del sistema se realizó mediante el registro de la medición de la posición angular del balancín entregada por el sensor potenciométrico.

Se realizaron varias pruebas bajo las mismas condiciones estáticas de operación y se promediaron los resultados obtenidos. El escalón de la señal PWM inicialmente se generó con un 36% del ciclo de trabajo, en el cual el balancín tuvo una respuesta estable en -30° geométricos de inclinación. En un tiempo arbitrario el programa conmutó a un ciclo de trabajo de salida del 62% en donde el balancín tuvo una respuesta subamortiguada y estable en un desplazamiento angular de 30° geométricos aproximadamente. Los resultados experimentales obtenidos a la salida del sensor se pueden ver en la figura 6.

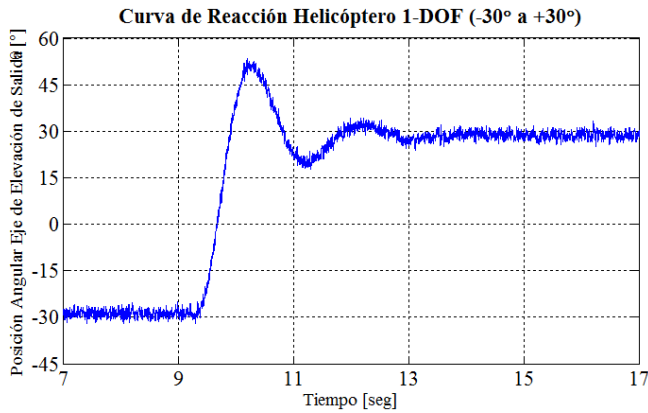


Figura 6. Respuesta al escalón del Helicóptero 1-DOF instrumentado a lazo abierto.

Como se evidencia en la figura 6, la respuesta es de segundo orden subamortiguada, que coincide con el obtenido en el modelo obtenido analíticamente en la Ec. 17 de la forma:

$$\frac{V_{\Theta}(s)}{V_{PWM}(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{Ec. 19}$$

Midiendo los valores promedio del sobreimpulso máximo $\%MP=40\%$ y tiempo de establecimiento $t_s = 4.6s$, de las respuestas al escalón se infieren los parámetros del coeficiente de amortiguamiento ξ , frecuencia natural no amortiguada ω_0 y ganancia estática del sistema real K . Con dichos valores se deduce que la función de transferencia del prototipo real del helicóptero 1-DOF. Despejando ξ de la ecuación Ec. 20 se tiene:

$$\%MP = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \% = 40\% \text{ donde } \xi = 0.28 \quad \text{Ec. 20}$$

Y despejando ω_0 de la ecuación Ec. 21:

$$t_{s1\%} = \frac{4.6}{\xi\omega_0} = 4.6s \text{ donde } \omega_0 = 3.53\text{rad/seg} \quad \text{Ec. 21}$$

La ganancia estática del sistema $K = 0.43$ se obtuvo realizando la diferencia de amplitudes final e inicial de la salida del sensor en [V] con respecto a la entrada promedio PWM entregada por el Arduino™ en [V]. De esta forma, la

función de transferencia identificada en forma experimental es de:

$$\frac{V_{\Theta}(s)}{V_{PWM}(s)} = \frac{5.37}{s^2 + 2s + 12.39} \quad \text{Ec. 22}$$

Se concluye que la respuesta del modelo identificado real de la Ec. 22 es semejante al modelo analítico obtenido en la Ec. 17 donde la frecuencia natural no amortiguada es aproximadamente cercana.

IV. Diseño de Controladores Digitales

En esta sección se describe el proceso de diseño de los controladores PID y DeadBeat de mejor desempeño para garantizar que la posición angular del eje de elevación del helicóptero 1-DOF se mantenga en valores deseados. Se propuso en común como parámetro de diseño que el controlador pueda operar para referencias alrededor del punto de operación en el ángulo de elevación $\theta = 0^\circ$ con variaciones permisibles entre el rango de $\pm 30^\circ$. Adicionalmente se establecieron como especificaciones de diseño que: a lazo cerrado el comportamiento del sistema sea estable; error en estado estacionario nulo; tiempos de establecimiento $t_s \leq 3[s]$, sobreimpulso máximo $\%MP \leq 10\%$ y respuesta rápida ante perturbaciones. La figura 7 muestra el esquema de control realimentado para los controladores digitales a diseñar.

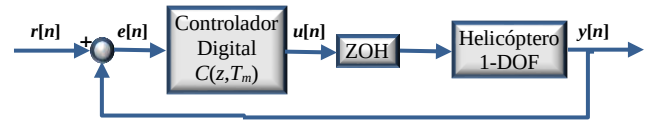


Figura 7. Diagrama de Bloques Sistema de Control Digital Realimentado.

A. Controlador PID

El diseño del PID se realizó en forma analítica mediante el método de ubicación de polos, teniendo en cuenta que las especificaciones de diseño definen una dinámica deseada a lazo cerrado. Con la especificación de sobreimpulso máximo se despeja el valor del coeficiente de amortiguamiento deseado de la Ec. 20:

$$\%MP_D = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \% = 10\% \text{ donde } \xi_D = 0.59 \quad \text{Ec. 23}$$

Y despejando ω_0 de la ecuación que define el tiempo de establecimiento en la Ec. 21 se obtiene el valor deseado de la frecuencia no amortiguada del sistema realimentado:

$$t_{sD1\%} = \frac{4.6}{\xi_D\omega_0} = 3s \text{ donde } \omega_{0D} = 2.59\text{rad/seg} \quad \text{Ec. 24}$$

De esta forma, se obtiene la función de transferencia deseada $G_D(s)$ para el sistema realimentado a partir de las especificaciones de diseño y particularmente el polinomio

característico deseado $P_D(s)$ que define la ubicación de polos de la dinámica deseada:

$$\begin{aligned} P_D(s) &= s^2 + 2\xi_D \omega_{0D} s + \omega_{0D}^2 \\ P_D(s) &= s^2 + 3.05s + 6.708 \end{aligned} \quad \text{Ec. 25}$$

Del polinomio característico se establece que la dinámica deseada a lazo cerrado para el sistema controlado debe poseer un par de polos complejos conjugados ubicados en:

$$p_{1,2} = \xi_D \omega_{0D} \pm j \omega_{0D} \sqrt{1 - \xi_D^2} = \sigma_D \pm j \omega_{nD} \quad \text{Ec. 26}$$

Donde σ_D es el grado de estabilidad relativo deseado que define la parte real de los polos y ω_{nD} la frecuencia natural amortiguada deseada que define la ubicación compleja de los polos ubicados en: $p_{1,2} = -1.525 \pm j2.093$.

Se establece la dinámica del controlador PID que relaciona la señal de control $U(s)$ con respecto a la señal de error $E(s) = R(s) - Y(s)$ en el esquema de control realimentado como se muestra en la Ec. 27:

$$C_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{NK_D s}{s+N} \quad \text{Ec. 27}$$

Donde K_P , K_I y K_D corresponden a las ganancias de las acciones de control proporcional, integral y diferencial respectivamente, y N el factor que hace realizable la acción de control diferencial para asegurar que el controlador sea propio e implementable en el dominio continuo (Sung & Lee, 2009; Mackenroth, 2013). Así se obtiene la función de transferencia del sistema helicóptero 1-DOF con el controlador PID a lazo cerrado $G_{LC}(s)$ y se extrae el polinomio característico del sistema controlado $P_{LC}(s)$:

$$G_{LC}(s) = \frac{C_{PID}(s) \cdot G_{HELI}(s)}{1 + C_{PID}(s) \cdot G_{HELI}(s)} \quad \text{Ec. 28}$$

$$\begin{aligned} P_{LC}(s) &= s^4 + (N+2)s^3 + \\ &\quad (12.39 + 2N + 5.37K_P + 5.37NK_D)s^2 + \\ &\quad (5.37NK_P + 5.37K_I + 12.395N)s + \\ &\quad 5.37NK_I \end{aligned} \quad \text{Ec. 29}$$

Al igualar el polinomio característico deseado $P_D(s)$ con el polinomio característico a lazo cerrado $P_{LC}(s)$ se aprecia que el orden no coincide, para lo cual, se agregan dos polos al $P_D(s)$ que no afecten la dinámica deseada. Para ello se adicionan polos (α y β) con parte real $\text{Re}(s) \geq -6\sigma \geq -9$ de la forma:

$$\begin{aligned} P'_D(s) &= (s^2 + 3.05s + 6.708)(s + \beta)(s + \alpha) \\ &= s^4 + (\beta + \alpha + 3.05)s^3 + \\ &\quad (\alpha(\beta + 3.05) + 3.05\beta + 6.708)s^2 + \\ &\quad (\alpha(3.05\beta + 6.71) + 6.71\beta)s + 6.71\alpha\beta \end{aligned} \quad \text{Ec. 30}$$

Igualando $P'_D(s)$ con $P_{LC}(s)$ se plantean las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{I. } N+2 &= \alpha + \beta + 3.05 \\ \text{II. } 12.3935 + 2N + 5.37K_P + 5.37NK_D &= \\ &\quad \alpha(\beta + 3.05) + 3.05\beta + 6.708 \\ \text{III. } 5.37K_P N + 5.37K_I + 12.3935N &= 3.05\alpha\beta + 6.708\alpha + 6.708\beta \\ \text{IV. } 5.37K_I N &= 6.708\alpha\beta \end{aligned}$$

Como se tiene un sistema de cuatro ecuaciones y seis incógnitas, existen dos parámetros de libertad, por lo cual se asume el valor de $\alpha = \beta = 9$, para garantizar la dinámica deseada del sistema a lazo cerrado. Bajo estas condiciones se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene que: $N = 19.05$; $K_I = 5.32$; $K_P = 1.02$ y $K_D = 0.85$. La función de transferencia del controlador PID diseñado reemplazando los valores de la solución del sistema de ecuaciones en Ec. 27 da como resultado:

$$C_{PID}(s) = 1.02 + \frac{5.32}{s} + \frac{16.19s}{s+19.02} \quad \text{Ec. 31}$$

$$C_{PID}(s) = \frac{17.21s^2 + 24.34s + 101.18}{s^2 + 19.02s}$$

El controlador PID análogo se discretiza para obtener el modelo digital del PID equivalente. Primero se selecciona el periodo de muestreo partiendo del uso de la Teoría de Muestreo de Nyquist. Se seleccionó un periodo de muestreo $T_m = 0.01[s]$, teniendo en cuenta que la componente de primer orden del controlador tiene un tiempo de respuesta $\tau = 1/19.02 = 0.05[s]$ y el tiempo de respuesta del helicóptero es aproximadamente de $\tau_{heli} = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/3.53 = 1.77[s]$. Para la discretización de la función de transferencia del controlador PID, se utilizó la aproximación de *Tustin* para la acción integral K_I , y la aproximación diferencial en atraso para la acción diferencial, donde se obtiene:

$$C_{PID}(z, T_m) = \frac{15.83z^2 - 31.43z + 15.61}{z^2 - 1.826z + 0.8263} = \frac{U(z, T_m)}{E(z, T_m)} \quad \text{Ec. 32}$$

La ecuación recursiva del controlador digital a implementar en el dominio temporal, se obtiene aplicando Transformada Z inversa a la Ec. 32 y desacoplando la salida de control $u[nT_m]$ en términos de sus valores pasados y valores presentes y pasados de la entrada del error $e[nT_m]$ (Moudgalya, 2007):

$$\begin{aligned} u[nT_m] &= 15.83e[nT_m] - 31.43e[n-1T_m] + \\ &\quad 15.61e[n-2T_m] + 1.28u[n-1T_m] - \\ &\quad 0.82u[n-2T_m] \end{aligned} \quad \text{Ec. 33}$$

B. Controlador por Muerte Súbita (Dead Beat)

Una de las características deseadas en el diseño de sistemas de control es que alcance el establecimiento lo más rápido posible. El controlador Dead Beat busca alcanzar el estado estacionario en $n+1$ muestras, donde n es el orden del controlador. En esencia, este controlador cancela todos los polos discretos del sistema y los reemplaza por polos en el

origen (Goodwin & Salgado, 2001). Para el diseño del controlador por muerte súbita se parte de la función de transferencia del helicóptero 1-DOF identificada experimentalmente:

$$G(s) = \frac{V_{\theta}(s)}{V_{PWM}(s)} = \frac{5.37}{s^2 + 2s + 12.39} \quad \text{Ec. 34}$$

El modelo de la Ec. 34 se discretiza utilizando la aproximación de *Tustin* con un periodo de muestreo $T_m = 0.05[s]$ que cumple con la teoría de muestreo así:

$$G(z, T_m) = \frac{0.0031z^2 + 0.0063z + 0.0031}{z^2 - 1.876z + 0.9055} \quad \text{Ec. 35}$$

La función de transferencia a lazo cerrado del sistema digital con el controlador de muerte súbita correspondiente al esquema de la figura 7 es:

$$\frac{Y(z, T_m)}{R(z, T_m)} = \frac{C_{DB}(z, T_m)G(z, T_m)}{1 + C_{DB}(z, T_m)G(z, T_m)} = T(z, T_m) \quad \text{Ec. 36}$$

Donde se asume que la función de transferencia se aproxima a $T(z, T_m)$. Entonces despejando el controlador se tiene que:

$$C_{DB}(z, T_m) = \frac{1}{G(z, T_m)} \cdot \frac{T(z, T_m)}{1 - T(z, T_m)} \quad \text{Ec. 37}$$

La Ec. 37 establece que el controlador requerido $C_{DB}(z, T_m)$ puede ser diseñado si se conoce el modelo del proceso $G(z, T_m)$. El controlador debe ser propio para ser realizable. Así, se asegura que el sistema realimentado alcance el estado estable en $n + 1$ o más periodos de muestreo. El controlador Dead Beat para el helicóptero 1-DOF tiene entonces la forma:

$$C_{DB}(z, T_m) = \frac{p_0z^2 + p_1z + p_2}{q_0z^2 + q_1z + q_2} = \frac{U(z, T_m)}{E(z, T_m)} \quad \text{Ec. 38}$$

Donde el objetivo del diseño es encontrar los coeficientes escalares p_0, p_1, p_2, q_0, q_1 y q_2 a partir de la función de transferencia del helicóptero $a_0 = 1, a_1 = -1.876, a_2 = 0.9055, b_0 = 0.0031, b_1 = 0.0063$ y $b_2 = 0.00013$.

Si $E(z, T_m)$ es la entrada al controlador, los coeficientes p_i y q_i , se pueden obtener desacoplando de la Ec. 38:

$$p_0 = \frac{1}{\sum b_i} = \frac{1}{(b_0 + b_1 + b_2)} = 79.365 \quad \text{Ec. 39}$$

$$p_1 = a_1 p_0 = -148.9$$

$$p_2 = a_2 p_0 = 71.86$$

$$q_0 = 1 - p_0 b_0 = 0.754$$

$$q_1 = -b_1 p_0 = -0.5$$

$$q_2 = -b_2 p_0 = -0.25 \quad \text{Ec. 40}$$

Entonces el controlador digital tendrá la forma:

$$G_{DB}(z, T_m) = \frac{79.365z^2 - 148.9z + 71.86}{0.75z^2 - 0.5z - 0.25} \quad \text{Ec. 41}$$

Aplicando la Transformada Inversa Z se obtiene la ecuación recursiva del controlador:

$$u[nT_m] = 2561e[nT_m] - 5074e[n-1T_m] + 2513e[n-2T_m] + 0.667u[n-1T_m] + 0.333u[n-2T_m] \quad \text{Ec. 42}$$

La señal de control entregada por el controlador por muerte súbita puede ser muy grande con valores no aceptables en la práctica, por esta razón se hace una modificación al controlador para evitar señales de control excesivas. Esta mejora se conoce como la compensación de *Dahlin* o compensación de tiempo muerto, y produce una respuesta más suave que la del control de muerte súbita.

Este método establece que la función de transferencia a lazo cerrado equivalente sea de la forma FOPDT (First Order Plus Dead Time) con tiempo de respuesta $\tau = 0.3[s]$ y tiempo muerto $L = nT_m = 3T_m = 0.15[s]$. En tiempo continuo la función de transferencia deseada a lazo cerrado es:

$$T(s) = \frac{e^{-Ls}}{\tau s + 1} = \frac{e^{-0.15s}}{0.3s + 1} \quad \text{Ec. 43}$$

Al aplicar Transformada Z se tiene con $T_m = 0.05[s]$:

$$T(z, T_m) = z^{-3} \frac{0.077z + 0.077}{z - 0.8462} = \frac{0.077z + 0.077}{z^4 - 0.8462z^3} \quad \text{Ec. 44}$$

Reemplazando la función de transferencia discreta del helicóptero 1-DOF $G(z, T_m)$ de la Ec. 35 y $T(z, T_m)$ de la Ec. 44 en Ec. 37 se tiene que:

$$C_{DB}(z, T_m) = \frac{0.077z^7 - 0.132z^6 - 0.017z^5 + 0.132z^4 - 0.0059z^3}{0.0031z^{10} + 0.001z^9 - 0.0053z^8 - 0.001z^7 + 0.0017z^6 - 0.00011z^5 + 0.00037z^4 + 0.0002z^3} \quad \text{Ec. 45}$$

V. Análisis de Resultados

La simulación de los controladores digitales PID y Dead Beat diseñados se realizó en la plataforma Simulink® de MATLAB® bajo la estructura de control realimentado genérica mostrada en la figura 8.

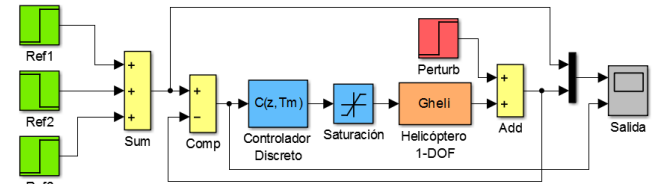


Figura 8. Esquema Simulación de Controladores Digitales en Simulink®.

Las simulaciones se ejecutaron para evaluar el desempeño de los controladores previo a su implementación, cuando se

someten a una referencia con diferentes posiciones angulares en las cercanías del punto de operación para el cual se linealizó el modelo del helicóptero. Cada uno de los controladores se simuló para observar la respuesta de la salida de posición angular de elevación del helicóptero 1-DOF, programando la señal de referencia de la siguiente forma: partiendo desde un ángulo deseado de 0° en un tiempo $t = 0[s]$, variando a $+20^\circ$ en $t = 5[s]$, para luego pasar a -10° en $t = 10[s]$ y finalizar en $+10^\circ$ en $t = 15[s]$. Para verificar la respuesta a perturbaciones, cada controlador se sometió a una perturbación aditiva del 20% presente a la salida en un tiempo $t = 20[s]$.

A. Simulación PID Digital

La simulación del sistema de control digital utilizando el PID discretizado y diseñado de la Ec. 32 se realizó en Simulink® bajo el esquema mostrado en la figura 9.

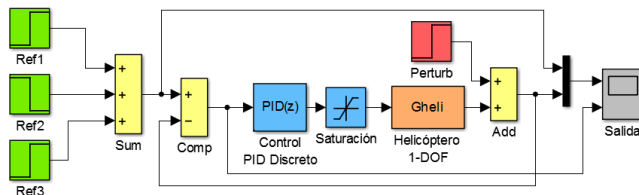


Figura 9. Simulación Control PID Digital.

El resultado de la simulación de la figura 9 se observa en la figura 10, donde las señales mostradas en la parte superior registran la señal de posición angular de referencia programada (color azul) y la señal de salida del sistema controlado (color rojo); y en la parte inferior la señal de error.

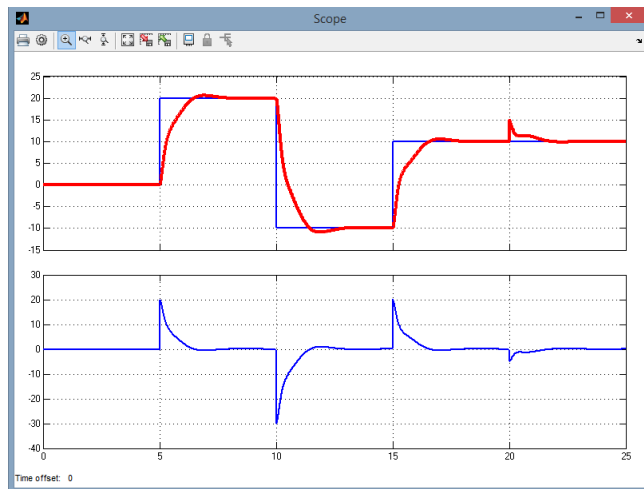


Figura 10. Respuesta Simulación Controlador PID Digital: a) Señal deseada (azul) y de salida (rojo). b) Señal de error.

La salida de posición angular del modelo del Helicóptero 1-DOF con el controlador PID Digital diseñado presenta una respuesta con error en estado estacionario cero después de alcanzar los valores de posición angular de referencia deseados. Es decir, la salida de posición angular sigue a la

referencia en forma satisfactoria y los sobrepasos presentes en las transiciones no superan la especificación del sobrepaso máximo establecido $\%MP$ del 10[%]. El tiempo de establecimiento t_s ante cada variación del estado de la referencia es cercano a $t_s = 3[s]$ y se observa que el sistema responde de manera estable ante la perturbación del 20[%] a los 20[s]. La señal de control fue saturada a valores permisibles acordes a los valores de la implementación real.

B. Simulación Control Digital por Muerte Súbita

La simulación del sistema de control por muerte súbita digital diseñado de la Ec. 40 se realizó en Simulink® bajo el esquema mostrado en la figura 11.

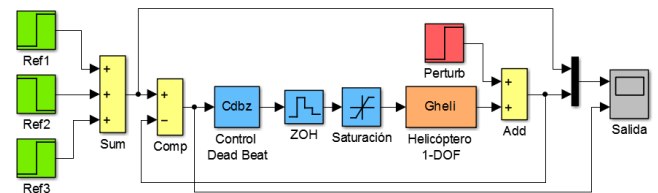


Figura 11. Simulación Control Dead Beat Digital.

El resultado de la simulación de la figura 11 se observa en la figura 12, donde las señales mostradas en la parte superior registran la señal de posición angular de referencia programada (color azul) y la señal de salida del sistema controlado (color rojo); y en la parte inferior la señal de error.

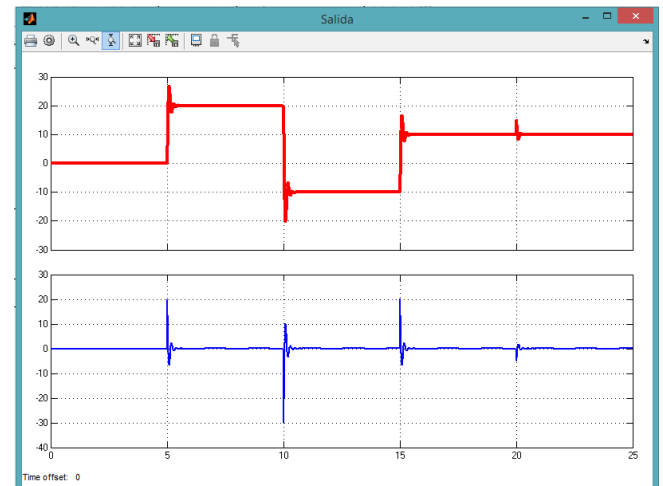


Figura 12. Respuesta Simulación Controlador Dead Beat Digital: a) Señal deseada (azul) y de salida (rojo). b) Señal de error.

Del desempeño sistema de control Dead Beat digital se puede decir que: presenta una excelente respuesta en estado estable; error en estado estacionario nulo que establece un seguimiento satisfactorio de la referencia; sobrepasos del 35 [%] aproximadamente; estabilidad no solo ante variaciones de la referencia sino ante perturbaciones y tiempos de estabilización inferiores a 1[s]. La desventaja de este controlador es que la señal de control no es implementable

físicamente debido a que los valores de la acción de control $u[n]$ alcanzaron valores por encima de la permisible (± 120) en el orden de 3000.

Para evitar esta desventaja se simuló el controlador Dead Beat con la Compensación de Dahlin, dando como resultados las señales mostradas en la figura 13.

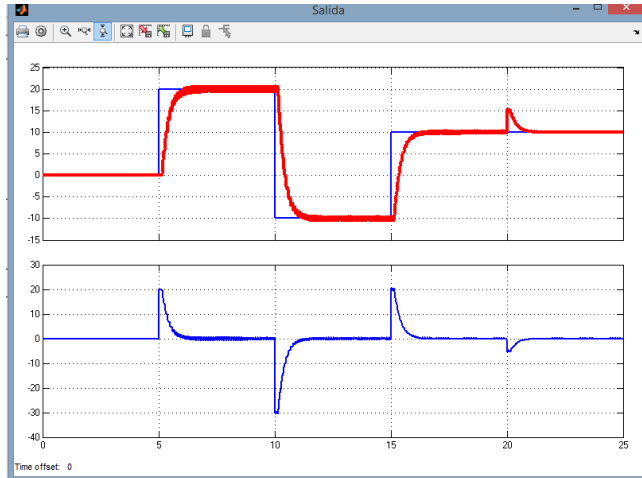


Figura 13. Respuesta Simulación Controlador Dahlin Digital:
a) Señal deseada (azul) y de salida (rojo). b) Señal de error.

La simulación de la figura 13 presenta una respuesta con error en estado estacionario cero después de alcanzar los valores de posición angular de referencia deseados. No se presentan sobrepasos en las transiciones de la referencia y el tiempo de establecimiento t_s ante cada variación del estado de la referencia es cercano a $t_s = 3[s]$ y se observa que el sistema responde de manera estable ante la perturbación del 20[%] a los 20[s]. La señal de control fue saturada a valores permisibles acordes a los valores de la implementación real. La figura 14 ilustra las respuestas de los controladores PID y Dahlin simultáneamente, donde las especificaciones de diseño se cumplen satisfactoriamente, sin embargo se aprecia un poco de rizado en la respuesta del segundo controlador.

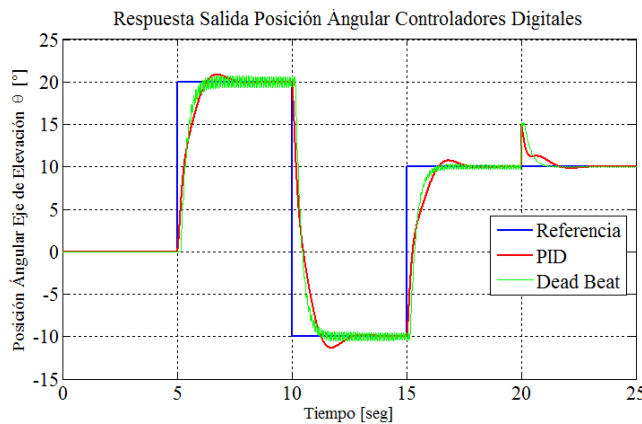


Figura 14. Respuesta Simulación Controladores PID y Dahlin Digitales.

Después de verificar el funcionamiento del programa de adquisición en el Arduino™ y la integración del prototipo del

helicóptero 1-DOF con la interface de comunicación serial de MATLAB®, se realizó el modelo en Simulink® del sistema con los controladores digitales PID y Dahlin diseñados con como se muestra en la figura 15:

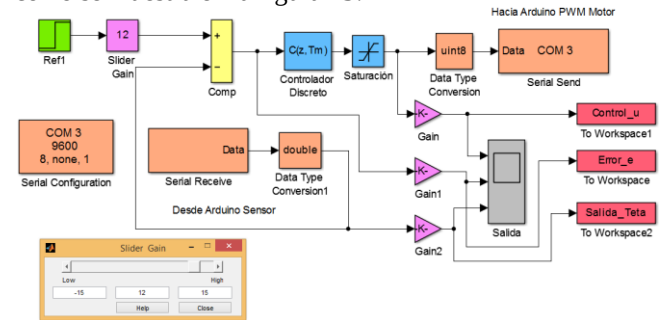


Figura 15. Diagrama de Bloques Simulink® para el control digital implementado sobre el Prototipo del Helicóptero.

El modelo implementado configura el puerto serial por el cual se hace la comunicación entre MATLAB® y la tarjeta Arduino™, usando el bloque *Serial Configuration*, en el cual se modificó el puerto COM 3 y la tasa de velocidad de 9600 [baudios] acorde a la configuración de la plataforma de programación del Arduino™. Para establecer el enlace de la comunicación fue necesario iniciar los programas con permisos de administrador.

La señal de referencia de la posición angular $r[n]$ se implementó por medio de un bloque *Slider*, que permitió el ajuste manual desde el computador por parte del usuario. El monitoreo de las señales de referencia $r[n]$, error $e[n]$, control $u[n]$ y salida $y[n]$ del sensor de posición se visualizaron en bloques *Scope*.

Los datos en formato entero no signado de 8 bits recibidos desde la entrada serial se convirtieron a formato *double* $y[n]$ para que sean compatibles con el modelo implementado. La señal realimentada $y[n]$ se resta de la señal de referencia $r[n]$ mediante el bloque comparador entregando la señal de error $e[n]$. La señal del error $e[n]$ ingresa al controlador PID o Dead Beat teniendo en cuenta la configuración de ganancias y periodo de muestreo. Se consideró ubicar a la salida del controlador un bloque de saturación para limitar la señal de control $u[n]$ a los valores admisibles.

La señal de control $u[n]$ se convierte de formato *double* a formato entero no signado de 8 bits para ser transferida por el puerto serial hacia la tarjeta Arduino™. El dato recibido por el Arduino™ se almacena en la variable *in*, que hace la escalización respectiva y envía la señal PWM al motor del propulsor.

Las señales monitoreadas en los *scopes* se exportan al *Workspace* de MATLAB® para almacenar, registrar y analizar los resultados para la evaluación del desempeño de los controladores implementados.

La figura 16 muestra la respuesta del resultado experimental en tiempo real del controlador PID Digital sobre el prototipo del Helicóptero 1-DOF donde se aseguró que el balancín permaneciera en estado estable en aproximadamente 13° de inclinación en el eje de elevación. Posteriormente se varió la

referencia a una posición angular de 6° en un tiempo cercano a $18[s]$, y finalmente se ajustó a -4° en un tiempo de $33[s]$. Para verificar la respuesta ante perturbaciones, se movió el balancín manualmente aproximadamente a los $42[s]$ emulando una perturbación sustractiva.

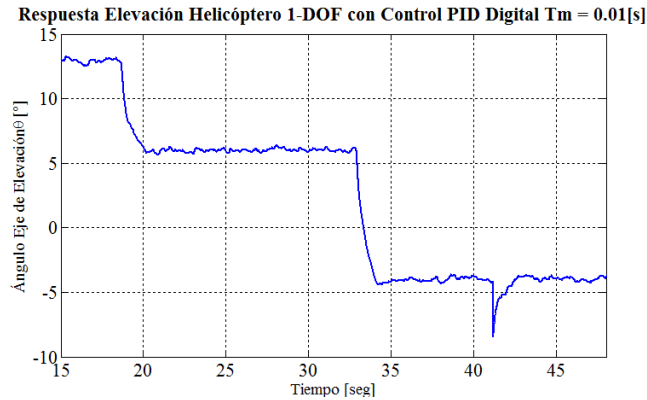


Figura 16. Respuesta Implementación Digital del Controlador PID sobre el Prototipo Helicóptero 1-DOF.

La figura 17 muestra la respuesta del resultado experimental en tiempo real del controlador Dead Beat Digital sobre el prototipo del Helicóptero 1-DOF donde se aseguró que el balancín permaneciera en estado estable en aproximadamente 14° de inclinación en el eje de elevación. Posteriormente se varió la referencia a una posición angular de 5° en un tiempo cercano a $18[s]$, y finalmente se ajustó a -5° en un tiempo de $33[s]$. Para verificar la respuesta ante perturbaciones, se movió el balancín manualmente aproximadamente a los $42[s]$ emulando una perturbación sustractiva.

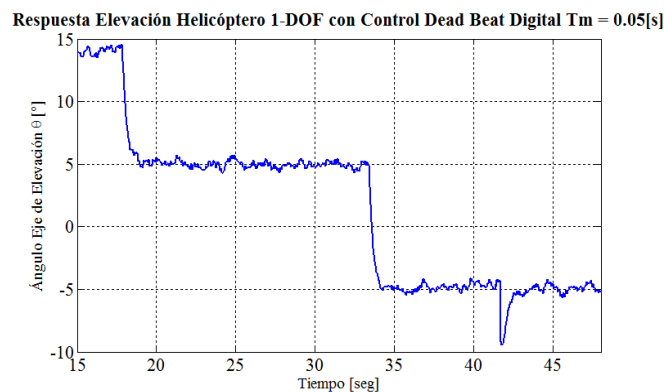


Figura 17. Respuesta Implementación Digital del Controlador Dead Beat sobre el Prototipo Helicóptero 1-DOF.

Los resultados de las figuras 16 y 17 se resumen en la Tabla 3 para evaluar el desempeño de los controladores digitales en términos de características estáticas y dinámicas de operación.

Tabla 3. Comparación de Desempeño Controladores PID y Dead Beat para control elevación Helicóptero 1-DOF

Parámetro	Control PID	Control Dead Beat
Estabilidad	Excelente	Excelente
Tiempo Crecimiento [s]	1.5	1
Sobrepaso Máximo [%]	2.5	0
Tiempo Establecimiento [s]	3	1.5
Error en Estado Estacionario [%]	0	0
Respuesta a Perturbaciones	Excelente	Excelente

Se puede concluir que el controlador Dead Beat responde mucho más rápido que el controlador PID. Adicionalmente se cumplen para ambos controladores el sobrepaso máximo es pequeño, especialmente para el controlador Dead Beat que es nulo. El controlador Dead Beat como el controlador PID garantizan un error en estado estacionario cero lo que implica que el seguimiento de la referencia es excelente, así mismo los controladores tienen una respuesta estable frente a variaciones de la referencia y frente a la presencia de perturbaciones. El bloque de saturación permito garantizar valores de acción de control permisibles a la salida del controlador.

VI. Conclusiones

El modelo del Helicóptero 1-DOF implementado en laboratorio se obtuvo mediante la definición de las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento del eje de elevación. Este modelo fue linealizado y validado experimentalmente mediante la técnica de curva de reacción en forma experimental.

A partir de la dinámica del sistema, se diseñaron los controladores digitales PID y de Muerte Súbita para controlar la posición angular del eje de elevación del Helicóptero 1-DOF, los cuales fueron simulados con resultados que satisfacen las especificaciones de diseño planteadas.

Los controladores digitales diseñados se implementaron sobre la plataforma de Simulink®, para controlar el prototipo experimental del helicóptero utilizando un sistema de adquisición y distribución de señales configurado sobre la plataforma Arduino™.

Se evaluó el desempeño de los controladores PID y Dead Beat a partir de los resultados experimentales obtenidos en la implementación real sobre el prototipo donde ambos controladores cumplieron satisfactoriamente las especificaciones de diseño planteadas en términos de parámetros estáticos y dinámicos de operación.

El control por muerte súbita con compensación de Dahlin tuvo un desempeño ligeramente superior al del PID digital, gracias a pesar de que requirió más operaciones para su ejecución.

VII. Referencias

- Park, D. & Lee, J. (1999, Aug.). *Attitude control of helicopter simulator using neural network based PID controller*. In IEEE International Conf. on Fuzzy System: Vol. 1, 465-469, Seoul.
- Xiaoxiao, Z. & Xiucheng D. (2005, Oct.). 3DOF helicopter control system based on LQR optimal controller. *Journal of Kunming university of science and technology*. Vol. 30, No. 5, 125-127.
- Xincheng, Y., Ying, Y. & Zhi-Qiang, G. (2007, Sept.). No Steady-State Error Tracking Control of 3DOF Experimental Helicopter System. *Journal of System Simulation*. Vol. 19, No. 18, 4279-4283.
- Yao, Y. & YiSheng, Z. (2009). Robust Attitude Control of a 3DOF Helicopter with Multi-operation Points. *Journal of System Science & Complexity*, 207-219.
- Ishutkina, M. A. (2004). *Design and Implementation of a Supervisory Safety Control for 3DOF Helicopter* (Master Thesis). Department of Aeronautics and Astronautics, MIT, USA.
- Shan, J., Liu, H. T. & Nowotny, S. (2005). *Synchronized Trajectory-tracking Control of Multiple 3DOF Experimental Helicopters*. In IEEE Proceedings of Control theory Applications. Vol. 152, No.6, 683-692.
- Lopez, M., Ortega, M. G., Vivas, C. & Rubio, F. R. (2007). Nonlinear L2 control of a laboratory helicopter with variable speed rotors. *Automatica*, Vol. 43, No.4, 655-661.
- Oliveira, V. A., Cossi, L. V., Teixeira, M. C. & Silva, A. M. (2009). Synthesis of PID controllers for a class of time delay systems. *Automatica*, Vol. 45, No.7, 1778-1782.
- Gao, J., Xu, X. & He, C. (202, Oct.). A Study on the Control Methods Based on 3-DOF Helicopter Model. *Journal of Computers*, Vol. 7, No. 10.
- Quanser Inc. (2006). *3DOF Helicopter system, product information*, Ontario, Canada, Autor..
- Zhou, F., Li, D. & Xia, P. (2006). *Research of Fuzzy Control for Elevation Attitude of 3DOF Helicopter*. In International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, 367-370.
- Zhang, Le & Bi, S. (2010). *Fuzzy-PID Control Algorithm of the Helicopter Model Flight Attitude Control*. In IEEE Chinese Control and Decision Conference, China.
- Liu, Z., Choukri, Z. & Shi, H. (2010, Aug). *Control Strategy Design Based on Fuzzy Logic and LQR for 3-DOF Helicopter Model*. In International Conference on Intelligent Control and Information Processing, China.
- Pallás, R. (2003). *Sensores y acondicionadores de señal*. Barcelona, España, Ed. Marcombo.
- Basta, P. O. (2012). *Quad Copter Flight* (Master Thesis). California State University, Northridge, USA.
- Lundström, D., Amadori, K. & Krus, P. (2010, Jan.) *Validation of Models for Small Scale Electric Propulsion Systems*. In 48th Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition - AIAA, Orlando, Florida, USA.
- Kibbe, M. A. (2014, Jun.). *Open-source hardware in controls education*. In 121st Annual Conference & Exposition, Indianapolis, Indiana, USA
- Wolf, C. (2011). *Flachheitsbasierter Steuerungsentwurf am Quanser- Laborhelikopter*.
- Sung, S. W., Lee, J. & Lee, I. B. (2009). *Process Identification and PID Control*, Wiley-IEEE Press.
- Mackenroth, U. (2013). *Robust Control Systems: Theory and Case Studies*. Springer Science & Business Media.
- Moudgalya, K. N. (2007). *Digital Control*. John Wiley & Sons, Ltda.
- Goodwin, G. C., Graebe C., & Salgado, M. (2001). *Control Systems Design*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA.
- Brantner, G., Fuchs, G., Schirrer, A. & Jakubek, S. (2012). *A Detailed Nonlinear Dynamic Model of a 3-DOF Laboratory Helicopter for Control Design*. In MATHMOD 7th Vienna on Mathematical Modelling.
- Bharathi, M. & Kumar G. (2013, Apr.). An LQR Controller Design Approach For Pitch Axis Stabilisation Of 3-DOF Helicopter System. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, Vol. 4, No. 4, 1398.
- Santos, K. & Choudhary, R. (2014). LQR Based PID Controller Design for 3-DOF Helicopter. *Journal of Computer, Information, Systems and Control Engineering*, Vol. 8, No. 8.
- Corvalán, I. & Negroni, J. (2012, Dic.). Modelo de un Control Aproximado de un Cuadricóptero Basado en Equilibrio de un Balancín. *Revista Ciencia Tecnología Sociedad*, Vol. 24, No. 34, 81-91.